

Obliczenia numeryczne na arkuszu kalkulacyjnym - całkowanie

CAŁKOWANIE

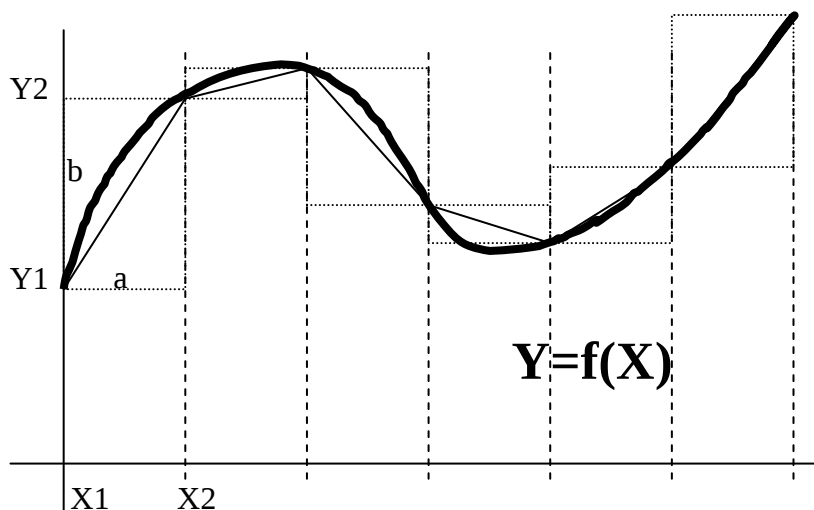
Wyliczenie objętości bryły, pola powierzchni, czy długości krzywej jest proste, jeśli geometryczne kształty są łatwe do matematycznego zdefiniowania. Jeśli natomiast wzór jest skomplikowany, to wyliczenie tych wartości jest niezmiernie trudne lub wręcz niemożliwe jeśli nie zastosuje się pewnych uproszczeń. Pomoc komputera w takich przypadkach jest nieodzowna. Obliczanie tych wielkości na komputerze nosi nazwę obliczeń numerycznych i polega nie na przekształcaniu wzorów (jak na matematyce) lecz na stosowaniu znanej w informatyce zasady: „dziel i rządź”. Dzielimy całą pracę na drobne fragmenty, obliczamy je a następnie sumujemy wyniki. W taki też sposób będziemy obliczać długości, pola i objętości. Obliczenia w ten sposób przeprowadzone nie są dokładne. Wynikają one z samej budowy komputera (liczby rzeczywiste pamiętane są w komputerze w sposób niedokładny) oraz z uproszczeń w obliczeniach. Pierwsze ograniczenie niwelujemy stosując coraz lepsze komputery, drugie - dzieląc obliczenia na większą ilość fragmentów.

Tego typu obliczenia stosuje się bardzo często w technice. Oto garść przykładów:

- jakie jest ugięcie belki pod obciążeniem (czy dach się zawali)
- jakie ciśnienie panuje u podstawy zbiornika z wodą (czy go rozsadzi)
- jaka siła odśrodkowa działa na przedmiot w ruchu po okręgu (czy płyta CD w stacji się rozleci)
- ile się wydłuży linia wysokiego napięcia pod własnym ciężarem (czy porazi przechodniów)
- ile elektryczności przepłynie przez kondensator gdy zmieni się natężenie (czy nastąpi przebicie i posypią się iskry)
- jaką pracę wykonamy rozprężając gaz (czy lodówka będzie mrozić)
- jak długo będzie wyciekała woda z basenu przez otwór (ile czasu potrzeba na opróżnienie zbiorników wody w czasie powodzi)

DŁUGOŚĆ KRZYWEJ

Grubą linią na poniższym wykresie zaznaczono krzywą, której długość (w przybliżeniu) chcemy obliczyć. Najprostszym sposobem jest wyliczenie długości przekątnych w prostokątach. Prostokąty mają jednakową szerokość (im mniejsza szerokość, tym dokładniejsze obliczenia). Wysokość obliczymy wyliczając ją z wzoru na krzywą. Wyliczona w ten sposób wartość długości zawsze będzie krótsza niż w rzeczywistości.



ZADANIE

Policz długość krzywej dla funkcji kwadratowej $y=2x^2-3x-10$ w przedziale $<-5..5>$. Cały zakres dzielimy na 100 fragmentów.

Przekątną w pierwszym prostokącie obliczymy z znanego wzoru Pitagorasa $=\sqrt{(a^2 + b^2)}$, gdzie a - szerokość prostokąta (X_2-X_1), b - wysokość prostokąta - (Y_2-Y_1)

Przykładowe obliczenia na arkuszu przedstawia poniższy obrazek

	A	B	C	D	E
1	x	y	długość	początek	-5
2	=E1	=2*A2^2-3*A2+5	=PIERWIASTEK((B3-B2)^2+\$E\$4^2)	koniec	5
3	=A2+\$E\$4	=2*A3^2-3*A3+5	=PIERWIASTEK((B4-B3)^2+\$E\$4^2)	przedziały	100
4	=A3+\$E\$4	=2*A4^2-3*A4+5	=PIERWIASTEK((B5-B4)^2+\$E\$4^2)	skok X	=(E2-E1)/E3
5	=A4+\$E\$4	=2*A5^2-3*A5+5	=PIERWIASTEK((B6-B5)^2+\$E\$4^2)		
6	=A5+\$E\$4	=2*A6^2-3*A6+5	=PIERWIASTEK((B7-B6)^2+\$E\$4^2)	DŁUGOŚĆ	=SUMA(C2:C101)
7	=A6+\$E\$4	=2*A7^2-3*A7+5	=PIERWIASTEK((B8-B7)^2+\$E\$4^2)		

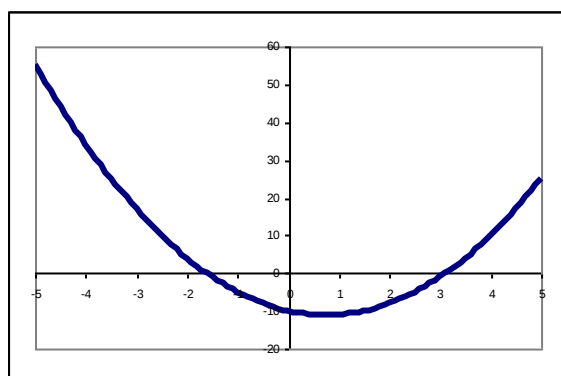
kolumna A - wartości X od -5 do 5 (wiersze 2 do 102)

kolumna B - wartości funkcji $Y=2X^2-3X+5$

kolumna C - przekątne prostokątów utworzone wartości branych z dwóch kolejnych wierszy (z tego względu ostatnia wartość z wiersza 102 nie powinna być brana pod uwagę)

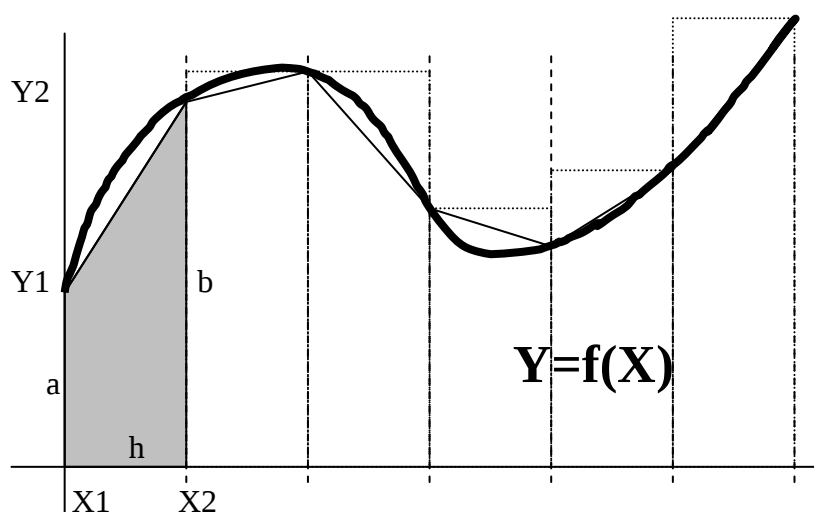
komórka E4 - obliczona szerokość prostokąta

komórka E6 - długość krzywej



POLE POWIERZCHNI

Obliczanie pól powierzchni ograniczonych krzywą polega na podzielenie obszaru pod krzywą na niewielkie fragmenty (np. prostokąty lub trapezy i zsumowaniu ich pól. Sposób postępowania i obliczania jest podobny do przedstawionego przy obliczaniu długości krzywej. Niektóre trapezy będą zajmowały mniejszy obszar niż w rzeczywistości (niedomiar), niektóre obszar większy (nadmiar).



ZADANIE

Policz pole powierzchni ograniczonej osią OX i krzywą $y=2x^2-3x-10$ w przedziale $<-5..5>$. Cały zakres dzielimy na 100 fragmentów. Pole liczymy metodą trapezów.

Pole powierzchni trapezu obliczymy ze znanego wzoru $= \frac{a+b}{2}h$ gdzie a - długość jednego boku (Y1), b - długość drugiego boku (Y2), h - szerokość prostokąta (X2-X1)

Przykładowe wyliczenia pokazuje poniższa tabela

	A	B	C	D	E
1	x	y	pole	początek	-5
2	=E1	=2*A2^2-3*A2-10	=MODUŁ.LICZBY((B2+B3)/2*\$E\$4)	koniec	5
3	=A2+\$E\$4	=2*A3^2-3*A3-10	=MODUŁ.LICZBY((B3+B4)/2*\$E\$4)	przedziały	100
4	=A3+\$E\$4	=2*A4^2-3*A4-10	=MODUŁ.LICZBY((B4+B5)/2*\$E\$4)	skok X	=(E2-E1)/E3
5	=A4+\$E\$4	=2*A5^2-3*A5-10	=MODUŁ.LICZBY((B5+B6)/2*\$E\$4)		
6	=A5+\$E\$4	=2*A6^2-3*A6-10	=MODUŁ.LICZBY((B6+B7)/2*\$E\$4)	POLE	=SUMA(C2:C101)
7	=A6+\$E\$4	=2*A7^2-3*A7-10	=MODUŁ.LICZBY((B7+B8)/2*\$E\$4)		
8	=A7+\$E\$4	=2*A8^2-3*A8-10	=MODUŁ.LICZBY((B8+B9)/2*\$E\$4)		

kolumna A - wartości X od -5 do 5 (wiersze 2 do 102)

kolumna B - wartości funkcji $Y=2X^2-3X-10$

kolumna C - pola powierzchni trapezów(ostatnia wartość z wiersza 102 nie powinna być praca pod uwagę) Użyto funkcji MODUŁ.LICZBY ponieważ pola pod wykresem mają wartość ujemną.

komórka E4 - obliczona szerokość trapezu

komórka E6 - pole powierzchni pod krzywą

ĆWICZENIA

Wylicz pole powierzchni i długość krzywej w podanym przedziale

$$y=2x^2-4x+1 \quad x= </10..10> \text{ co } 0,1$$

$$y=2\sin^2(x/2) \quad x= < 0..360 \text{ stopni}> \text{ co } 1$$

$$x=10\sin t+2 \text{ i } y=5\cos t-3 \quad t=<0..2\pi> \text{ co } 0,1$$